האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

בחינה בתורת הקבוצות (80200)

סמסטר הסתיו – תשס"ה – מועד א'

המורה: פרופ' עזריאל לוי

הזמן: שעתיים

ענה על חמש מבין שש השאלות.
תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות, אלא אם נאמר במפורש שאין צורך להוכיח.
הקפד לצטט באופן מלא וברור את המשפטים בהם הנך משתמש.
אם תענה על שש השאלות אז ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות.
השתמש באקסיומת הבחירה היכן שהיא דרושה, אבל הקפד לציין שאתה עושה זאת.

1. תהיינה F, G פונקציות. מהו תנאי הכרחי ומספיק לכך שגם $F \cup G$ פונקציה? הוכח שתנאי זה הכרחי.

2. הוכח כי $\Re \preceq P(N)$ אל תשתמש במשפטים העוסקים בעוצמות.
(N ו-$\Re$ הן קבוצת המספרים הטבעיים והממשיים, בהתאמה. לקבוצה A, $P(A)$ היא קבוצת החזקה של A.)

3. אנו מגדירים, לעוצמות a, b, כי $a \leq b$ אם קיימות קבוצות $A \subseteq B$ כך ש- $|A| = a$ ו-$|B| = b$, ומגדירים $a < b$ אם $a \leq b$ ו- $a \neq b$. הוכח, ע"י שימוש במשפטים מצוטטים, שהיחס $<$ הוא טרנזיטיבי.

4. לעוצמות a, b, c, האם קיים תמיד $a < b \rightarrow a^c < b^c$? אם התשובה חיובית תן הוכחה קצרה לכך, עד 4 שורות בקרוב, ואם התשובה שלילית הבא דוגמה נגדית עם הוכחה קצרה.

5. תהי A קבוצה סדורה ע"י היחס $<$. הוכח או הפרך את הטענה "לכל פונקציה $F : A \rightarrow A$ שומרת סדר ולכל $x \in A$ קיים $F(x) \geq x$ " עבור כל אחת מן הקבוצות הסדורות A הבאות.
א. A היא קבוצת המספרים הרציונליים בסדר הטבעי שלהם.
ב. A היא סודר α.

6. בצאתך מן הלמה של צורן הוכח את אקסיומת הבחירה או את משפט השוואת העוצמות, כבחירתך.

בהצלחה!